Escuela Colombiana de Ingeniería
Julio Garavito

Trabajo de grado para optar por el título
de Matemático

Ad-compacidad

Carlos Antonio Pinzón Henao

Dr. Néstor Raúl Pachón
Director del trabajo

Topología, departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015-2

Índice general

Introducción

En este trabajo de grado presentamos una noción débil de compacidad en espacios topológicos, llamada ad-compacidad, y exponemos algunas de sus propiedades.

La compacidad es uno de los conceptos fundamentales de la topología. La búsqueda de generalizaciones y particularizaciones de la compacidad ha sido objeto de estudio en los últimos años, e.g. Compacidad módulo ideales[4][5][6], compacidad definida mediante ideales[7][8], C-compacidad módulo ideales[9] y cl-compacidad[1].

Este trabajo de grado contribuye a dicha labor al explorar las propiedades básicas de una generalización de compacidad a la que llamamos **ad-compacidad**. Dichas propiedades básicas se pueden resumir en: caracterización de la ad-compacidad por bases y subbases, funciones que la preservan, subespacios que la heredan y relación entre espacios producto y ad-compacidad.

Así mismo, demostramos que no hay relación entre la ad-compacidad y la cl-compacidad[1], la cual es otra generalización de compacidad propuesta recientemente como trabajo de grado por otro alumno de esta misma institución.

Sección 1

Definición y primeros ejemplos

Un conjunto es **compacto** si para todo cubrimiento abierto para éste, existe un subcubrimiento finito. Para definir *ad-compacidad*, mantuvimos la definición original pero reemplazamos los subcubrimientos por estructuras más débiles que aparecen naturalmente mediante el operador de adherencia. Hemos llamado *ad-subcubrimientos* a dichas estructuras.

Definición 1.1 (Ad-subcubrimientos)**.** Si X es un espacio topológio y $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos para $K \subseteq X$, entonces toda subcolección $\{U_i\}_{i\in J} \subseteq \{U_i\}_{i\in I}$ que cumpla $\bigcup_{i\in J} \overline{U_i} \supseteq K$ es llamada un **ad-subcubrimiento** de $\{U_i\}_{i\in I}$ para K.

Definición 1.2 (Ad-compacidad)**.** Si X es un espacio topológico y $K \subseteq X$, decimos que K es **ad-compacto** si para todo cubrimiento abierto para K existe un ad-subcubrimiento finito.

Además, cuando X es ad-compacto decimos que el espacio topológico es **ad-compacto**.

A partir de esta definición es inmediato que todo espacio compacto es ad-compacto porque si K es compacto, entonces para todo cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ para K existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i\in J} U_i \supseteq K$, de donde $\bigcup_{i\in J} \overline{U_i} \supseteq K$.

Nota. En un espacio topológico X, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. $K \subseteq X$ es ad-compacto.

2. Para todo cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ para K, existe $J \subseteq I$, finito con $\overline{\{U_i\}_{i\in J}} \supseteq K$. [1]

3. Para todo cubrimiento abierto no vacío $\{U_i\}_{i\in I}$ para K, con $U_i \cap K \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, existe $J \subseteq I$, finito con $\overline{\{U_i\}_{i\in J}} \supseteq K$. [2]

Lo primero a ver es que la propiedad de ad-compacidad no es demasiado débil, es decir que no siempre se posee; y que tampoco es demasiado fuerte, o sea que se puede poseer sin requerir compacidad.

Para ello mostramos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1. $\mathbb{R}$ con la topología usual no es ad-compacto.
En efecto:
Sea $U_n = (n-1, n+1)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un cubrimiento abierto para $\mathbb{R}$. Sin embargo, si $J \subseteq \mathbb{Z}$ es finito, entonces $\bigcup_{n\in J} \overline{U_n} = \bigcup_{n\in J}[n-1, n+1]$ está acotado inferiormente por $(\text{mín } J) - 1$, y por ende, $\bigcup_{n\in J} \overline{U_n} \neq \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 1.2. $\mathbb{R}$ con la topología de colas abiertas a derecha, $\mathcal{C}$ [1], es ad-compacto y no es compacto.
En efecto:
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección no vacía de abiertos de $\mathcal{C}$, no vacíos y diferentes de $\mathbb{R}$, con $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}$. Para cada $i \in I$, existe $a_i \in \mathbb{R}$ con $U_i = (a_i, +\infty)$.

1. $\mathbb{R}$ es ad-compacto porque $\overline{(a, +\infty)} = \mathbb{R}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pues los únicos cerrados de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ son $\emptyset$, $\mathbb{R}$, y todos los de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$; y el único de estos cerrados que contiene a $(a, +\infty)$ es $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}$ no es compacto porque si $J \subseteq I$ es finito, entonces $\bigcup_{i\in J} U_i = (\text{mín}\{a_i : i \in J\}, +\infty) \neq \mathbb{R}$.

$\square$

[1] La topología de colas abiertas a derecha está dada por $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

A continuación se presentan más ejemplos de espacios ad-compactos no compactos.

[1] Ello porque J es finito y porque para todos $A, B \subseteq X$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

[2] Se puede restringir porque si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto para K y se define $I^* = \{i \in I : U_i \cap K \neq \emptyset\}$, entonces $\{U_i\}_{i\in I^*}$ es un subcubrimiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ para K.

Ejemplo 1.3. Como en el ejemplo anterior,

1. $\mathbb{R}$ con la topología de colas cerradas y abiertas a derecha[1] es ad-compacto y no es compacto.
2. $\mathbb{R}$ con la topología de colas abiertas a izquierda[2] es ad-compacto y no es compacto.
3. $\mathbb{R}$ con la topología de colas cerradas y abiertas a izquierda[3] es ad-compacto y no es compacto.

En efecto:
Al igual que en la demostración anterior, en todos los casos ocurre que si U es un abierto no vacío, entonces $\overline{U} = \mathbb{R}$. $\square$

[1]Esta topología está dada por $\mathcal{C} \cup \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
[2]Esta topología está dada por $\mathcal{C}^{\star} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
[3]Esta topología está dada por $\mathcal{C}^{\star} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

En este punto parece que el hecho de que "para todo abierto no vacío U se tiene $\overline{U} = X$" es una característica típica de los espacios ad-compactos no compactos.

Pero ello no se cumple siempre. Un primer ejemplo de un espacio con estas características se muestra a continuación.

Ejemplo 1.4. En $\mathbb{N}$,[1] sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ la colección dada por:

$$U \in \tau \text{ si y solo si para todo } u \in U \text{ se cumple que } u \text{ mód } 2 \in U.^2$$

Bajo este contexto τ es una topología para $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ es ad-compacto no compacto, y existen abiertos cuya adherencia no es $\mathbb{N}$.
En efecto:

1. τ es una topología para $\mathbb{N}$:
   a) $\emptyset \in \tau$ porque cumple la propiedad "vacíamente", y $\mathbb{N} \in \tau$ porque $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{N}$.
   b) Si $U, V \in \tau$ y si $x \in U \cap V$ entonces x mód $2 \in U$ y x mód $2 \in V$, luego x mód $2 \in U \cap V$. Así que $U \cap V \in \tau$.
   c) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de τ y $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j \in I$ con $x \in U_j$, luego x mód $2 \in U_j$, y por ende x mód $2 \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Así que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
2. $\mathbb{N}$ no es compacto:

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{n, n \text{ mód } 2\}$.

La colección $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto para $\mathbb{N}$, sin embargo, si $J \subseteq \mathbb{N}$ es finito, entonces existe $k \in \mathbb{N} \setminus (J \cup \{0,1\})$, de modo que $k \in \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right)$. Por ende, $\bigcup_{i\in J} U_i \neq \mathbb{N}$.

3. $\mathbb{N}$ es ad-compacto:

   Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto para $\mathbb{N}$, entonces existen i_0 e i_1 con $0 \in U_{i_0}$ y $1 \in U_{i_1}$.

   Para probar que $\mathbb{N}$ es ad-compacto basta ver que

   a) $\overline{\{0\}} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N}$, y que
   b) $\overline{\{1\}} = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N}+1$,

   pues de ser así, como $\overline{U_{i_0}} \supseteq \overline{\{0\}}$ y $\overline{U_{i_1}} \supseteq \overline{\{1\}}$, entonces $\overline{U_{i_0}} \cup \overline{U_{i_1}} = \mathbb{N}$.

   Y ello es cierto por lo siguiente.

   $\overline{\{0\}} = 2\mathbb{N}$ porque:

   ($\supseteq$). Si $x \in 2\mathbb{N}$ y si U es un abierto que contiene a x, por definición de abierto, $0 \in U$, o sea, $\{0\} \cap U \neq \emptyset$, y así se concluye que $x \in \overline{\{0\}}$.

   ($\subseteq$). Y si $x \notin 2\mathbb{N}$, $\{x, 1\}$ sería un abierto que contiene a x y que no tiene puntos de $\{0\}$, y así se concluye que $x \notin \overline{\{0\}}$.

   De la misma manera se comprueba que $\overline{\{1\}} = 2\mathbb{N}+1$.

4. Existen abiertos en $\mathbb{N}$ cuya adherencia no es $\mathbb{N}$:

   $\{0\}$ es abierto y como se acaba de mostrar $\overline{\{0\}} = 2\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

$\square$

[1]En este texto $\mathbb{N}$ representa al conjunto de los enteros no negativos, o sea a $\mathbb{Z}^{\geq 0}$.
[2]u mód 2, que se lee "u módulo 2", es el residuo de u al dividirse por 2. Por definición, u mód $2 \in \{0,1\}$ incluso si $u < 0$.

En base al ejemplo anterior, se esperaría que si en $\mathbb{N}$ se definieran topologías de la misma manera pero respecto al módulo 3, o 4, o cualquier otro número mayor que 2, van a aparecer espacios que son ad-compactos no compactos y que contienen abiertos cuya adherencia no es $\mathbb{N}$.

En efecto esto funciona incluso si la topología es la corresponsiente al módulo 1, salvo que en ese caso la adherencia de todos los abiertos no vacíos es $\mathbb{N}$ puesto que todos contienen a $\{0\}$.

A continuación presentamos una justificación de este hecho.

Teorema 1.1. *En $\mathbb{N}$, sea $N \in \mathbb{N}$ y sea τ_N dada por:*

$U \in \tau_N$ si y solo si para todo $u \in U$ se cumple que u mód $N \in U$.

Bajo este contexto τ_N es una topología para $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ es ad-compacto no compacto, y si $N > 1$, existen abiertos cuya adherencia no es $\mathbb{N}$.

Demostración.

1. τ_N es una topología para $\mathbb{N}$:

   Se desarrolla igual que para el caso mód2, pero reemplazando 2 por N.

2. $\mathbb{N}$ no es compacto:

   Se desarrolla igual que para el caso mód2, pero reemplazando 2 por N:

   Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{n, n \text{ mód } N\}$.

   La colección $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto para $\mathbb{N}$, sin embargo, si $J \subseteq \mathbb{N}$ es finito, entonces existe $k \in \mathbb{N} \setminus (J \cup \{0, 1, ..., N-1\})$, de modo que $k \in \mathbb{Z} \setminus \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right)$. Por ende, $\bigcup_{i\in J} U_i \neq \mathbb{N}$.

3. $\mathbb{N}$ es ad-compacto. También es similar al caso mód2:

   Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto para $\mathbb{N}$, entonces existen $i_0, i_1, ..., i_{N-1}$, con $n \in U_{i_n}$ para todo $n < N$.

   Para probar que $\mathbb{N}$ es ad-compacto basta ver que si $0 \leq n < N$,

   a) $\overline{\{n\}} = N\mathbb{N} + n$,

   pues de ser así, como $\overline{U_{i_n}} \supseteq \overline{\{n\}}$, entonces $\bigcup_{n=0}^{N-1} \overline{U_{i_n}} = \mathbb{N}$.

   Y ello es cierto porque si $0 \leq n < N$,

   ($\supseteq$). Si $x \in N\mathbb{N} + n$ y si U es un abierto que contiene a x, por definición de abierto, $n = x$ mód $N \in U$, o sea, $\{n\} \cap U \neq \emptyset$, y así se concluye que $x \in \overline{\{n\}}$.

   ($\subseteq$). Si $N = 1$, $n = 0$ y es inmediato que $1\mathbb{N} + 0 = \mathbb{N} \supseteq \overline{\{0\}}$; y si $N > 1$ y $x \notin N\mathbb{N} + n$, $x \neq n$ y x mód $N \neq n$, luego $\{x, x \text{ mód } N\}$ sería un abierto que contiene a x y que no tiene puntos de $\{n\}$, y así se concluye que $x \notin \overline{\{n\}}$.

   Por ende $\overline{\{n\}} = N\mathbb{N} + n$.

4. Si $N > 1$, existen abiertos en $\mathbb{N}$ cuya adherencia no es $\mathbb{N}$:

   $\{0\}$ es abierto y como se acaba de mostrar, $\overline{\{0\}} = N\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

$\square$

De la misma manera en que se generalizó de mód2 a módN en $\mathbb{N}$, se puede generalizar a $\mathbb{Z}$, siendo $N \geq 1$. Es un hecho que los espacios resultantes siguen siendo ad-compactos no compactos.

En un intento por generalizar esto mismo a los reales, se puede definir x mód r para $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, como el único $z \in [0, r)$ para el cual existe algún $N \in \mathbb{Z}$ con $Nr + z = x$. Lamentablemente, en el espacio topológico resultante se pierde la ad-compacidad como se muestra en el ejemplo 1.5.

Ejemplo 1.5. En $\mathbb{R}$, sea $r \in \mathbb{R}^+$, y sea τ_r dada por:

$$U \in \tau_r \text{ si y solo si para todo } u \in U \text{ se cumple que } u \text{ mód } r \in U.$$

Con esta topología, $\mathbb{R}$ no es ad-compacto.
En efecto:
Sea $r \in \mathbb{R}^+$.

- τ_r es una topología para $\mathbb{R}$:

  Se desarrolla igual que como se ha hecho en los ejemplos anteriores que involucran la operación módulo para definir la topología.

- $\mathbb{R}$ no es ad-compacto:

  Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $U_x = \{x, x \text{ mód } r\}$.

  Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, U_x es abierto y $\overline{U_x} = r\mathbb{Z} + (x \text{ mód } r) = r\mathbb{Z} + x$.

  Es claro que $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} U_x = \mathbb{R}$ y que si $J \subseteq \mathbb{R}$ es finito, existe $z \in [0, r)$ con $z \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in J} \overline{U_i}$, y por ende, $\bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \neq \mathbb{R}$.

$\square$

¿Por qué funciona en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$ pero no en $\mathbb{R}$?

La característica que tienen los ejemplos anteriores, y que no tiene $\mathbb{R}$, es que la imagen de la función módN es finita, mientras que la de módr no lo es. Sin embargo,

- En $\mathbb{R}$ con la topología τ_r, todos los conjuntos de la forma $\bigcup_{y \in Y} (r\mathbb{Z} + y)$, donde Y es un subconjunto finito de $[0, r)$ con al menos dos elementos, son ad-compactos no compactos.
- Se puede definir otra topología similar, basada en una función con imagen finita, que dote de ad-compacidad a los reales.

El siguiente teorema justifica estas dos afirmaciones.

Teorema 1.2. *Sea X no vacío, y sea $f : X \to X$ una función tal que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$.*
Definimos τ_f así:

$$U \in \tau_f \text{ si y solo si para todo } x \in U \text{ se cumple } f(x) \in U.$$

Bajo estas condiciones,

1. *τ_f resulta ser una topología para X.*
2. *$A \subseteq X$ es ad-compacto si y solo si $f(A)$ es finito.*
3. *$A \subseteq X$ es compacto si y solo si A es finito.*
4. *Si $U \subseteq X$ es abierto no vacío, entonces $f(U)$ consta de un único elemento si y solo si para todo abierto no vacío $V \subseteq U$ se cumple $\overline{V} \supseteq U$.*

Demostración.

1. τ_f es una topología para X.

   a) Es inmediato que $\emptyset, X \in \tau_f$.

   b) Si $U, V \in \tau_f$ y $x \in U \cap V$, $f(x) \in U$ y $f(x) \in V$, luego $f(x) \in U \cap V$, y así, $U \cap V \in \tau_f$.

   c) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos de X con $U_i \in \tau_f$ para todo $i \in I$, y si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j \in I$ con $x \in U_j$, de donde
   $$f(x) \in U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

2. $A \subseteq X$ es ad-compacto si y solo si $f(A)$ es finito.

   $\rightarrow$). Nótese que para cada $x \in X$, $\{x, f(x)\}$ es abierto y $\overline{\{x, f(x)\}} = f^{-1}(\{f(x)\})^3$.

   Como $\{\{x, f(x)\}\}_{x \in A}$ es un cubrimiento por abiertos para A, existe $J \subseteq A$, finito, con
   $$A \subseteq \bigcup_{x \in J} \overline{\{x, f(x)\}} = \bigcup_{x \in J} f^{-1}\left(\{f(x)\}\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in J} f(x)\right) = f(J),$$
   luego $f(A) \subseteq f(J)$.

   $\leftarrow$). Si $f(A)$ es finito, existe $J \subseteq A$, finito, con $f(A) = f(J)$. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento arbitrario por abiertos para A.

   Para cada $x \in J$ existe $i_x \in I$ con $x \in U_{i_x}$. Como $\{x, f(x)\} \subseteq U_{i_x}$ para todo $x \in J$, entonces
   $$\bigcup_{x \in J} \overline{U_{i_x}} \supseteq \bigcup_{x \in J} \overline{\{x, f(x)\}} = \bigcup_{x \in J} f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(J)) \supseteq A.$$

[3] Ver la nota al final de este teorema.

3. $A \subseteq X$ es compacto si y solo si A es finito.

   $\rightarrow$). Como $\{\{x, f(x)\}\}_{x\in A}$ es un cubrimiento por abiertos para A y A es compacto, existe $J \subseteq A$, finito, con $\bigcup_{x\in J}\{x, f(x)\} \supseteq A$. Es inmediato que A es finito.

   $\leftarrow$). Es claro que si A es finito entonces es compacto.

4. Si $U \subseteq X$ es abierto no vacío, entonces $f(U)$ consta de un único elemento si y solo si para todo abierto no vacío $V \subseteq U$ se cumple $\overline{V} \supseteq U$.

   $\rightarrow$). Sean $V \subseteq U$ abierto no vacío, $v \in V$, y $u \in U$. Supongamos que $f(U)$ consta de un único punto, es decir, $f(U) = \{f(u)\}$.

   Como $f(u) = f(v)$ y $f(v) \in V$, entonces
   $$\overline{V} \supseteq \overline{\{f(v)\}} = f^{-1}(\{f(v)\}) = f^{-1}(\{f(u)\}) \supseteq U.$$

   $\leftarrow$). Supongamos que existen $a, b \in U$ con $f(a) \neq f(b)$. Sabemos que $\{a, f(a)\}$ es un abierto no vacío con $\{a, f(a)\} \subseteq U$. Sin embargo, dado que $\overline{\{a, f(a)\}} = f^{-1}(\{f(a)\}) \not\supseteq \{b\}$, se sigue que $\overline{\{a, f(a)\}} \not\supseteq A$.

$\square$

Nota. En este espacio se cumplen las siguientes propiedades

1. Para todo $x \in X$, $\{x, f(x)\}$ es abierto[4] porque $f(x) \in \{x, f(x)\}$ y $f(f(x)) = f(x) \in \{x, f(x)\}$.

2. Para todo $x \in X$, $\overline{\{x, f(x)\}} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

   $\supseteq$). Sea $z \in f^{-1}(\{f(x)\})$, y sea U un abierto con $z \in U$. Como $f(x) = f(z)$ y $f(z) \in U$, se tiene $f(x) \in U$. Luego $U \cap \{x, f(x)\} \supseteq \{f(x)\} \neq \emptyset$.

   $\subseteq$). Sea $z \in \overline{\{x, f(x)\}}$. Como $\{z, f(z)\}$ es un abierto que continene a z, $\{z, f(z)\} \cap \{x, f(x)\} \neq \emptyset$, de donde $\emptyset \neq f(\{z, f(z)\}) \cap f(\{x, f(x)\}) = \{f(z)\} \cap \{f(x)\}$, es decir, $f(z) = f(x)$.

[4]Estos abiertos son importantes porque $\{\{x, f(x)\} : x \in X\}$ es una base para X.

Sección 2

Caracterización por bases y subbases

Al igual que la compacidad, la ad-compacidad puede ser caracterizada a partir de cubrimientos básicos.

Teorema 2.1 (Caracterización de ad-compacidad por abiertos básicos)**.** *Si X es un espacio topológico y $K \subseteq X$, entonces K es ad-compacto si y solo si para todo cubrimiento de K por abiertos básicos, existe un ad-subcubrimiento finito.*

Demostración.
Veamos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. K es ad-compacto, o sea, todo cubrimiento abierto para K tiene un ad-subcubrimiento finito.

2. Todo cubrimiento por abiertos básicos para K tiene un ad-subcubrimiento finito.

($\rightarrow$). Es inmediato que si K es ad-compacto y $\{B_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de abiertos básicos para K, existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i\in J} \overline{B_i} \supseteq K$, pues independientemente de que $\{B_i\}_{i\in I}$ sea un cubrimiento de abiertos básicos, es un cubrimiento de abiertos.

($\leftarrow$). Supongamos que para todo cubrimiento de abiertos básicos $\{B_i\}_{i\in I}$ para K, existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i\in J} \overline{B_i} \supseteq K$.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de abiertos para K. Para cada $x \in K$, existe $i_x \in I$ con $x \in U_{i_x}$, y existe un abierto básico B_x con $x \in B_x \subseteq U_{i_x}$.

Como $\{B_x\}_{x\in K}$ es un cubrimiento de abiertos básicos para K, existe $H \subseteq K$, finito, con $\bigcup_{x\in H} \overline{B_x} \supseteq K$.

Así, dado que $B_x \subseteq U_{i_x}$ para todo $x \in H$, entonces siendo $J = \{i_x : x \in H\}$, se tiene que $\bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \supseteq \bigcup_{x \in H} \overline{B_x} \supseteq K$, donde $J \subseteq I$ es finito.

□

Sin embargo, aunque podemos caracterizar la compacidad sólo con cubrimientos subbásicos según el lema de Alexander, para el caso de la ad-compacidad es necesario añadir una condición adicional. Dicha condición no resulta muy estricta, según mostramos al final de la demostración del teorema.

Teorema 2.2 (Equivalente del lema de Alexander para ad-compacidad)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{S}$ una subbase para τ tal que para todo par de abiertos no disjuntos $U, V \in \mathcal{S}$ se cumple $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$. Entonces,*

$K \subseteq X$ es ad-compacto si y solo si para todo cubrimiento por abiertos en $\mathcal{S}$ para K existe un ad-subcubrimiento finito.

Demostración.
Veamos que bajo las condiciones enunciadas, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. K es ad-compacto, o sea, todo cubrimiento abierto para K tiene un ad-subcubrimiento finito.
2. Todo cubrimiento para K por abiertos subbásicos tiene un ad-subcubrimiento finito.

($\rightarrow$). Es inmediato que si K es ad-compacto, y $\{S_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos subbásicos para K, existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i \in J} \overline{S_i} \supseteq K$, pues independientemente de que $\{S_i\}_{i \in I}$ sea un cubrimiento por abiertos subbásicos, es un cubrimiento abierto.

($\leftarrow$). Supongamos que K no es ad-compacto y que al mismo tiempo se cumple que para todo cubrimiento de abiertos subbásicos $\{S_i\}_{i \in I}$ para K, existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i \in J} \overline{S_i} \supseteq K$.

Sea Z la colección de todos los cubrimientos $\{U_i\}_{i \in I}$ abiertos para K que no tienen ad-subcubrimientos finitos, o sea, de aquellos para los cuales no existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i \in J} \overline{U_i} \supseteq K$.

Veamos que existe un cubrimiento de abiertos C que es maximal en Z.

1. Z no puede ser vacío porque de ser así, K sería ad-compacto.

2. Sea $L \subseteq Z$ una colección ordenada linealmente por inclusión. Se busca mostrar que existe una cota superior en Z para L.

Si L es vacía, cualquier elemento de Z puede servir como cota superior. Entonces supongamos que L no es vacía.

Sea $M = \bigcup_{l \in L} l$. Es claro que paro toda $l \in L$, $l \subseteq M$, y por ende, dado que $L \neq \emptyset$, que M es un cubrimiento de abiertos para K. Resta ver que no existe $m \subseteq M$, finita, con $\bigcup_{U \in m} \overline{U} \supseteq K$.

Supongamos que sí existe tal m. Llamemos $m = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe $L_i \in L$ con $V_i \in L_i$. Como L está ordenado linealmente por inclusión, existe un $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $L_i \subseteq L_j$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Tenemos que $m \subseteq L_j$ es finito y que $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \supseteq K$. Entonces $L_j \notin L$, imposible.

Así que podemos aplicar el lema de Zorn y concluir que existe un elemento maximal C para Z.

Ello implica que si V es un abierto con $V \notin C$, entonces $C \cup \{V\} \notin Z$, luego $C \cup \{V\}$ tiene una subcolección finita ${C_0}^\star$ necesariamente de la forma ${C_0}^\star = C_0 \cup \{V\}$, con $\bigcup_{U \in C_0^\star} \overline{U} \supseteq K$.

Consideremos $C \cap \mathcal{S}$. Si $\bigcup_{U \in C \cap \mathcal{S}} U \supseteq K$, entonces por hipótesis, existiría $F \subseteq C \cap \mathcal{S} \subseteq C$, finita, con $\bigcup_{u \in F} \overline{U} \supseteq K$ y K sería ad-compacto. Así que $\bigcup_{U \in C \cap \mathcal{S}} U \not\supseteq K$.

Sea $x \in K$ con $x \notin \bigcup_{U \in C \cap \mathcal{S}} U$. Como $\bigcup_{U \in C} U \supseteq K$, existe $V \in C$ con $x \in V$. De igual manera, como $\mathcal{S}$ es una subbase para X, existen $S_1, S_2, ..., S_n \in \mathcal{S}$ con $x \in S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \subseteq V$.

Como $C \cap \mathcal{S}$ no cubre a x, entonces para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $S_i \notin C$. Por ende, para cada i, existe $C_i \subseteq C$ finito y tal que $\bigcup_{U \in C_i^\star} \overline{U} \supseteq K$, donde $C_i^\star = \{S_i\} \cup C_i$. Esto implica entre otras cosas, que para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\bigcup_{U \in C_i} \overline{U} \supseteq K \setminus \overline{S_i}$.

Pero entonces, si llamamos $F = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y $F^\star = F \cup \{V\}$, se tiene que

$$\bigcup_{U \in F} \overline{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\bigcup_{U \in C_i} U} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{U \in C_i} \overline{U} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(K \setminus \overline{S_i}\right) = K \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i},$$

de donde

$$\bigcup_{U \in F^\star} \overline{U} = \overline{V} \cup \bigcup_{U \in F} \overline{U} \supseteq \overline{V} \cup \left(K \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} \right).$$

Así, como sabemos por hipótesis que $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} S_i}$, entonces tenemos $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} \subseteq \overline{V}$, de donde $\bigcup_{U \in F^\star} \overline{U} \supseteq K$. Esto contradice que $C \in Z$, con lo cual queda demostrado que K es ad-compacto.

□

Como mencionamos, la condición adicional que exige el teorema 2.2 a la subbase $\mathcal{S}$ no es tan estricta como parece. De hecho, todos los ejemplos tratados en este texto la satisfacen, según se muestra en seguida.

Ejemplo 2.1. $\mathbb{R}$ cumple la condición con la subbase $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
En efecto:
Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces

1. $\overline{(-\infty, a) \cap (-\infty, a)} = \overline{(-\infty, a)}$,
2. $\overline{(a, +\infty) \cap (a, +\infty)} = \overline{(a, +\infty)}$,
3. $\overline{(-\infty, b) \cap (a, +\infty)} = \overline{(a, b)} = [a, b] = (-\infty, b] \cap [a, +\infty) = \overline{(-\infty, b)} \cap \overline{(a, +\infty)}$,
4. $\overline{(-\infty, b) \cap (-\infty, a)} = \overline{(-\infty, a)} = (-\infty, a] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a] = \overline{(-\infty, b)} \cap \overline{(-\infty, a)}$, y
5. $\overline{(b, +\infty) \cap (a, +\infty)} = \overline{(b, +\infty)} = [b, +\infty) = [b, +\infty) \cap [a, +\infty) = \overline{(b, +\infty)} \cap \overline{(a, +\infty)}$.

□

Ejemplo 2.2. $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ cumple la condición con la subbase $\mathcal{S} = \mathcal{C}$.
En efecto:
Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces

$$\overline{(b, +\infty) \cap (a, +\infty)} = \overline{(b, +\infty)} = \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{(b, +\infty)} \cap \overline{(a, +\infty)}.$$

□

Ejemplo 2.3. Si (X, τ_f) es un espacio topológico definido por el teorema 1.2, entonces cumple la condición con la subbase $\mathcal{S} = \{\{x, f(x)\} : x \in X\}$.
En efecto:
Sean $x, y \in X$ con $\{x, f(x)\} \cap \{y, f(y)\} \neq \emptyset$. Necesariamente se cumple que $f(x) = f(y)$.

Por ello, $\overline{\{x, f(x)\}} = f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(y)\}) = \overline{\{y, f(y)\}}$. □

Sección 3

Funciones que preservan ad-compacidad

¿Qué propiedades debe cumplir una función con dominio ad-compacto para que su imagen sea ad-compacta?

Afortunadamente, la ad-compacidad se preserva fácilmente por funciones. Como mostraremos en seguida en el teorema 3.1, basta con que sean continuas y sobreyectivas para lograr este propósito.

Teorema 3.1. *Si X es ad-compacto y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es ad-compacto.*

Demostración.
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto para Y. Como f es continua, $B_i = f^{-1}(U_i)$ es abierto para cada $i \in I$. Además, $\{B_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto para X.

Ya que X es ad-compacto, existe $J \subseteq I$, finito, con $\bigcup_{i\in J} \overline{B_i} = X$. Así,

$$\bigcup_{i\in J} \overline{U_i} = \bigcup_{i\in J} \overline{f(B_i)} \supseteq \bigcup_{i\in J} f\left(\overline{B_i}\right) = f\left(\bigcup_{i\in J} \overline{B_i}\right) = f(X),$$

y como f es sobreyectiva, $\bigcup_{i\in J} \overline{U_i} \supseteq f(X) = Y$.

$\square$

Sección 4

Subespacios ad-compactos

En esta sección presentamos las propiedades que debe cumplir un subconjunto de un espacio ad-compacto, para que herede la ad-compacidad.

Un primer resultado es el siguiente.

Teorema 4.1. *Si X es un espacio topológico ad-compacto y $Y \subseteq X$ es cerrado y abierto, entonces Y es ad-compacto.*

Demostración.
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto para Y. Llamemos $U_{i^\star} = Y^c$, y sea $I^\star = I \cup \{i^\star\}$. Como Y^c es abierto, $\{U_i\}_{i\in I^\star}$ es un cubrimiento de abiertos para X, luego existe $J^\star \subseteq I^\star$, finito, con $\bigcup_{i\in J^\star} \overline{U_i} = X$ y con $i^\star \in J^\star$.[1]

Sea $J = J^\star \setminus \{i^\star\}$. Como $\bigcup_{i\in J^\star} \overline{U_i} = \overline{U_{i^\star}} \cup \bigcup_{i\in J} \overline{U_i} = \overline{Y^c} \cup \bigcup_{i\in J} \overline{U_i}$, entonces

$$\bigcup_{i\in J} \overline{U_i} \supseteq \left(\bigcup_{i\in J^\star} \overline{U_i}\right) \setminus \overline{Y^c} = X \setminus \overline{Y^c} = \left(\overline{Y^c}\right)^c = int\,(Y) = Y,$$

y por ende, Y es ad-compacto. $\square$

Sin embargo, el recíproco de este teorema no se cumple necesariamente, como se muestra a continuación.

Ejemplo 4.1. Aunque $\mathbb{R}$ con la topología de colas abiertas a derecha es ad-compacto y aunque $K = (-\infty, 0)$ no es abierto ni cerrado, K es ad-compacto.
En efecto:

[1] Si no está, se añade.

Es inmediato dado que $\overline{(a, +\infty)} = \mathbb{R}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (ver el ejemplo 1.2).

□

Otro resultado importante es el siguiente.

Teorema 4.2. *Sea X un espacio Hausdorff. Todo $A \subseteq X$ ad-compacto es cerrado.*

Demostración.
Sea $u \in A^c$. Como X es Hausdorff, para cada $x \in A$ existen abiertos V_x, y U_x, disjuntos, con $u \in U_x$, y $x \in V_x$. Como $\bigcup_{x \in A} V_x \supseteq A$ y A es ad-compacto, existe $J \subseteq A$, finito, con $\bigcup_{x \in J} \overline{V_x} \supseteq A$.

Es claro que $U = \bigcap_{x \in J} U_x$ es abierto y que $u \in U$. Ahora, $A \cap U = \emptyset$ porque si $z \in A \cap U$ entonces existe $x \in J$ con $z \in \overline{V_x}$ y con $z \in U_x$. Esto implica que $V_x \cap U_x \neq \emptyset$, contradicción.

De ahí que $u \in U \subseteq A^c$, con lo que, A^c es abierto, o lo que es lo mismo, A es cerrado.

□

Además, el teorema 4.1 puede ser generalizado para conjuntos abiertos y *g-cerrados*.

Definición 4.1 (g-cerrado[3])**.** Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) es **g-cerrado** si $\overline{A} \subseteq U$ para todo abierto U con $A \subseteq U$.

Teorema 4.3. *Si X un espacio topológico ad-compacto y $Y \subseteq X$ es abierto y g-cerrado, entonces Y es ad-compacto.*

Para este teorema ofrecemos dos demostraciones distintas.

Demostración 1.
Sea $\{V_a\}_{a \in A}$ una colección de subconjuntos abiertos de X, tal que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$. Como A es g-cerrado, se tiene que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$.

Entonces $X = \left(X \setminus \overline{A}\right) \cup \bigcup_{a \in A} V_a$, y ya que X es ad-compacto, existe $A_0 \subseteq A$, finito, con $X = \overline{\left(X \setminus \overline{A}\right)} \cup \bigcup_{a \in A_0} \overline{V_a}$.

Pero como $\overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus int\left(\overline{A}\right)$ y $A \subseteq int\left(\overline{A}\right)$ (puesto que es abierto), resulta que

$$\overline{(X \setminus \overline{A})} \cup \bigcup_{a \in A_0} \overline{V_a} \subseteq (X \setminus A) \cup \bigcup_{a \in A_0} \overline{V_a}.$$

Por lo tanto, $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{a \in A_0} \overline{V_a}$, y así $A = A \cap X \subseteq \bigcup_{a \in A_0} \overline{V_a}$.

Entonces A es ad-compacto. $\square$

Demostración 2.
Dado que Y es abierto, $\overline{Y} \setminus Y$ es cerrado. Como Y es g-cerrado y $\overline{Y} \setminus Y$ es cerrado, entonces Y debe ser cerrado (demostrado en [3]).

Ya que Y es abierto y cerrado, se dan las condiciones necesarias para aplicar el teorema 4.1. $\square$

Sección 5

Espacios producto y ad-compacidad

Los teoremas mostrados a continuación son un resumen de la relación entre los espacios producto y la ad-compacidad.

Teorema 5.1. *Si un producto de espacios topológicos es ad-compacto entonces cada espacio factor lo es.*

Demostración.
Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos.

Llamemos $X = \prod_{i\in I} X_i$, y sea $j \in I$. La j-ésima proyección, $p_j : X \to X_j$ dada por $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$, es una función continua y sobreyectiva [2]. Como X es ad-compacto, X_j también lo es.

$\square$

Como se muestra en seguida, el recíproco del teorema anterior requiere una condición adicional para cumplirse. Esta condición es similar a la que se exige en la caracterización de ad-compacidad por abiertos subbásicos (Ver teorema 2.2).

Para la demostración del teorema 5.2 será necesario hacer uso de los siguientes lemas.

Lema 5.1. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos.*
Para todo $A_i \subseteq X_i$ con $i \in I$, se cumple $\overline{p_i^{-1}(A_i)} = p_i^{-1}(\overline{A_i})$.

En efecto:

Sea $A_k \subseteq X_k$ con $k \in I$. Llamemos $Y_k = A_k$, y $Y_i = X_i$ para todo $i \neq k$.

Como $p_k^{-1}(A_k) = \prod_{i \in I} Y_i$, entonces

$$\overline{p_k^{-1}(A_k)} = \overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i} = p_k^{-1}(\overline{A_k}).$$

Lema 5.2. *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de espacios topológicos tal que para todo par de abiertos no disjuntos $U, V \in \tau_i$, se cumple que $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$, para todo $i \in I$.*
Entonces para todos $U_k \subseteq X_k$ y $V_j \subseteq X_j$ con $j, k \in I$ y con $p_k^{-1}(V_k) \cap p_j^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, se cumple que $\overline{p_k^{-1}(V_k) \cap p_j^{-1}(U_j)} = \overline{p_k^{-1}(V_k)} \cap \overline{p_j^{-1}(U_j)}$.

En efecto:
Sean $p_k^{-1}(V_k)$ y $p_j^{-1}(U_j)$ no disjuntos. Llamemos $Y_k = V_k$, $Y_i = X_i$ para todo $i \neq k$, $Z_j = U_j$ y $Z_i = X_i$ para todo $i \neq j$.

Nótese que

1. $p_k^{-1}(V_k) = \prod_{i \in I} Y_i$, y

2. $p_j^{-1}(U_j) = \prod_{i \in I} Z_i$.

Entonces:

1. Si $k = j$, se tiene que $\overline{Y_i} \cap \overline{Z_i} = X_i \cap X_i = X_i = \overline{Y_i \cap Z_i}$ para todo $i \neq k$, y que $\overline{U_k} \cap \overline{Z_j} = \overline{V_k} \cap \overline{U_j} = \overline{V_k \cap U_j} = \overline{Y_k \cap Z_j}$ por la hipótesis adicional del lema.

   Luego $\prod_{i \in I} \overline{Y_i} \cap \overline{Z_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i \cap Z_i}$.

2. Si $k \neq j$, se tiene que $\overline{Y_i} \cap \overline{Z_i} = X_i \cap X_i = X_i = \overline{Y_i \cap Z_i}$ para todo $i \neq k, j$, que $\overline{Y_k} \cap \overline{Z_k} = \overline{V_k} \cap X_k = \overline{V_k} = \overline{Y_k \cap Z_k}$, y que $\overline{Y_j} \cap \overline{Z_j} = X_j \cap \overline{U_j} = \overline{U_j} = \overline{Y_j \cap Z_j}$.

   Luego también se cumple que $\prod_{i \in I} \overline{Y_i} \cap \overline{Z_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i \cap Z_i}$.

En ambos casos, podemos concluir la igualdad deseada porque

$$\begin{aligned}
\overline{p_k^{-1}(V_k)} \cap \overline{p_j^{-1}(U_j)} &= \overline{\prod_{i\in I} Y_i} \cap \overline{\prod_{i\in I} Z_i} \\
&= \prod_{i\in I} \overline{Y_i} \cap \prod_{i\in I} \overline{Z_i} \\
&= \prod_{i\in I} \overline{Y_i} \cap \overline{Z_i} \\
&= \prod_{i\in I} \overline{Y_i \cap Z_i} \\
&= \overline{\prod_{i\in I} Y_i \cap Z_i} \\
&= \overline{\prod_{i\in I} Y_i \cap \prod_{i\in I} Z_i} \\
&= \overline{p_k^{-1}(V_k) \cap p_j^{-1}(U_j)}.
\end{aligned}$$

Teorema 5.2. *Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una colección de espacios ad-compactos y en cada uno ocurre que para todo par de abiertos no disjuntos $U, V \in \tau_i$, se cumple que $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$, entonces el producto $\prod_{i\in I} X_i$ también es ad-compacto.*

Demostración.
Llamemos $X = \prod_{i\in I} X_i$. Sabemos que $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(V_i) : i \in I \text{ y } V_i \in \tau_i\}$ es una subbase para X.

Sea C un cubrimiento por abiertos subbásicos para X sin ad-subcubrimientos finitos.

Sea $i \in I$, y sea $C_i = \{V_i \in \tau_i : p_i^{-1}(V_i) \in C\}$. Si existiera $Z_i \subseteq C_i$, finito, tal que $\bigcup_{U\in Z_i} \overline{U} \supseteq X_i$, por el lema 5.1 se cumpliría que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{V_i\in Z_i} \overline{p_i^{-1}(V_i)} &= \bigcup_{V_i\in Z_i} p_i^{-1}\left(\overline{V_i}\right) \\
&= p_i^{-1}\left(\bigcup_{V_i\in Z_i} \overline{V_i}\right) \\
&= p_i^{-1}\left(X_i\right) \\
&= X,
\end{aligned}$$

de donde se concluiría que $\{p_i^{-1}(V_i) : V_i \in Z_i\}$ es un ad-subcumbrimiento finito de C para X, lo cual es absurdo según la hipótesis.

Así que para todo $i \in I$, C_i no tiene ad-subcubrimientos finitos. No obstante, X_i es ad-compacto para todo $i \in I$, luego debe existir $x_i \in X_i$ con $x_i \notin \bigcup_{U \in C_i} U$.

Sea $x = (x_i)_{i \in I}$. Como se cumple que $x_i \notin \bigcup_{U \in C_i} U$ para todo $i \in I$, entonces $x \notin \bigcup_{U \in C} U$, y esto es imposible dado que C es un cubrimiento para X. Concluímos que todo cubrimiento por abiertos subbásicos para X tiene un ad-subcubrimiento finito.

Para aplicar el equivalente del lema de Alexander para ad-compacidad, sólo hace falta ver que para todo par de abiertos no disjuntos $U, V \in S$, se cumple que $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$. Pero esto es inmediato de el lema 5.2

$\square$

Un comentario que debe rescatarse es que el teorema 5.2 es válido sobre el espacio producto con la **topología producto**. Como se muestra a continuación, con la **topología caja** no se cumple necesariamente dicho teorema.

Ejemplo 5.1. Para cada $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, sea $X_k = (\mathbb{Z}, \tau_{f_k})$, donde $f_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ está dada por $f_k(n) = n \bmod k$. (En el teorema 1.2 está la definición precisa de τ_{f_k}).

X dotado de la topología producto es un espacio ad-compacto, sin embargo, al dotarlo con la topología caja deja de serlo.
En efecto:

1. Como se mostró en el ejemplo 2.3, para cada $k \in \mathbb{N}$, X_k es ad-compacto.

   Veamos que para todo $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ se cumple que $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$ para todos $U, V \in \tau_{f_N}$ con $U \cap V \neq \emptyset$.

   Sean $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $U, V \in \tau_{f_N}$ con $U \cap V \neq \emptyset$. Por la definición de f_N, sabemos que

$$\begin{aligned}
\overline{U} \cap \overline{V} &= f_N^{-1}(f_N(U)) \cap f_N^{-1}(f_N(V)) \\
&= f_N^{-1}(f_N(U) \cap f_N(V)) \\
&= \{n \in \mathbb{Z} : f_N(n) \in (f_N(U) \cap f_N(V))\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z} : (\exists u \in U)(\exists v \in V)(f_N(n) = f_N(u) \text{ y } f_N(n) = f_N(v))\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z} : (\exists u \in U)(\exists v \in V)(f_N(u) = f_N(v) = f_N(n))\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z} : f_N(n) \in U \text{ y } f_N(n) \in V\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z} : f_N(n) \in U \cap V\} \\
&= f_N^{-1}(f_N(U \cap V)) \\
&= \overline{U \cap V}.
\end{aligned}$$

Luego X es ad-compacto por el teorema 5.2.

2. Si se dota a X con la topología caja, conideremos el cubrimiento

$$C = \left\{ \prod_{i=1}^{+\infty} \{n_k, n_k \text{ mód } k\} \right\}_{(n_1, n_2, \ldots) \in X}.$$

Es claro que C cubre a X.

Supongamos que existe $J \subseteq X$, finito, con

$$X = \bigcup_{(n_1, n_2, \ldots) \in J} \overline{\prod_{i=1}^{+\infty} \{n_k, n_k \text{ mód } k\}},$$

o sea,

$$X = \bigcup_{(n_1, n_2, \ldots) \in J} (\mathbb{Z} + n_1, 2\mathbb{Z} + n_2, 3\mathbb{Z} + n_3, \ldots).$$

Pero esto es imposible, pues si tomamos un entero $N > |J|$ y supo- nemos que

$$\bigcup_{(n_1, n_2, \ldots) \in J} N\mathbb{Z} + n_N = \mathbb{Z} = \bigcup_{k=1}^{N} N\mathbb{Z} + k,$$

se tendría que

$$N > |J| \geq \left| \{N\mathbb{Z} + n_N\}_{(n_1, n_2, \ldots) \in J} \right| = N,$$

lo cual es absurdo.

□

Sección 6

Cl-compacidad y ad-compacidad

En un trabajo de grado previo se definió otra forma débil de compacidad, llamada *cl-compacidad*[1], de la siguiente manera.

Definición 6.1 (Cl-compacidad [1]). Un espacio topológico X es llamado **cl-compacto** si $\overline{K}$ es compacto para todo $K \subseteq X$ compacto.

Los siguientes ejemplos muestran que cl-compacidad no implica ad-compacidad, y viceversa, respectivamente.

Ejemplo 6.1. $\mathbb{R}$ no es ad-compacto pero es cl-compacto.
En efecto:

1. Como se mostró en el ejemplo 1.1, $\mathbb{R}$ no es ad-compacto.
2. $\mathbb{R}$ es cl-compacto porque por el teorema de Heine-Borel, si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto entonces es cerrado y acotado, luego $\overline{K} = K$ es compacto.

$\square$

Ejemplo 6.2. $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ es ad-compacto pero no es cl-compacto.
En efecto:

1. Como se mostró en el ejemplo 1.2, $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ es ad-compacto.
2. $K = [0, +\infty)$ es compacto pues si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de abier-

tos para K, existe $i \in I$ con $0 \in U_i$, en cuyo caso, $K \subseteq U_i$, pues U_i es una cola o es $\mathbb{R}$.

No obstante, $\overline{K} = \mathbb{R}$ no es compacto según el ejemplo 1.2. Así que $\mathbb{R}$ no es cl-compacto.

$\square$

Ejemplo 6.3. $\mathbb{N}$ con la topología módulo 2 es ad-compacto y no es cl-compacto.
En efecto:

1. Como se mostró en el ejemplo 1.4, $\mathbb{N}$ es ad-compacto.
2. El conjunto $K = \{0, 1\}$ es compacto porque es finito. Sin embargo, como se mostró en el ejemplo 1.4, $\overline{K} = \mathbb{N}$ no es compacto.

   Así que $\mathbb{N}$ no es cl-compacto.

$\square$

Bibliografía

[1] J.D. Rodríguez, *Espacios Cl-compactos*. Trabajo de grado, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

[2] S.W. Davis, *Topology*. Mc-Graw Hill. 2005. Pág. 64.

[3] N. Levine, *Generalized closed sets in topology*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 19:1 (1970). [1]

[4] R.L. Newcomb, *Topologies wich are compact modulo an ideal*, Ph. Dissertation, Univerity of California at Snata Barbara, 1967.

[5] D.V. Rancin, *Compactness modulo an ideal*, Soviet Math Doklady, 13:1 (1972), 193-197.

[6] T.R Hamlett y D. Jancovii, *Compactness with respect to an ideal*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 7:48 (1990), 849-861.

[7] R. Hosny, *Some types of compactness via an ideal*, International Journal of Scientific and Engineering Research, 4:5 (2013), 1293-1296.[2]

[8] A.A. Nasef, *Some classes of compactness in terms of ideals*, Soochow Tour of Math, 27:3 (2001), 343-352.

[9] M.K. Gupta y T. Noiri, *C-Compactness modulo an ideal*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. (2006), 1-12.[3]

[1] Vista previa disponible en `http://link.springer.com/article/10.1007\%2FBF02843888`

[2] Disponible en http://www.ijser.org/researchpaper %5CSOME-TYPES-OF-COMPACTNESS-VIA-IDEAL.pdf

[3] Disponible en `http://www.emis.de/journals/HOA/IJMMS/Volume2006/078135.pdf`